OS PAM Physique et application des mathématiques	
Thème : Physique	Session : Eté 2015

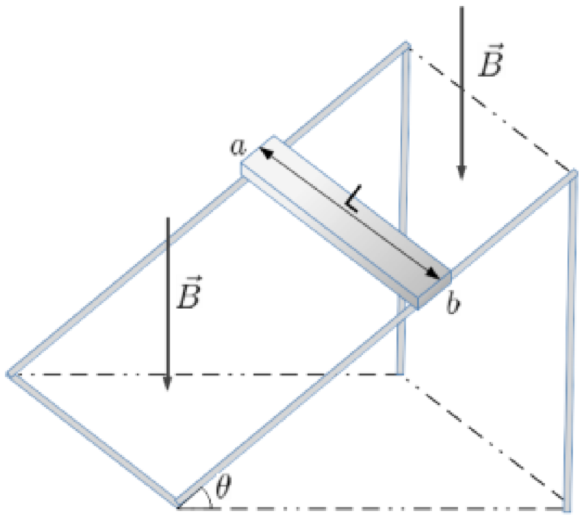
ÉNONCÉ

Problème 1 (10 pts)

Une barre métallique de longueur L, de masse m et de résistance R est placée sur un plan incliné métallique. L'angle d'inclinaison est θ et les rails ont une résistance négligeable.

Ce plan incliné baigne dans un champ magnétique $\vec{B}$ dirigé verticalement vers le bas.

Au départ, la barre est au repos. On la lâche et elle glisse sans frottement le long des rails.



a) Le courant induit dans la barre va-t-il de a à b ou de b à a ? Justifiez votre réponse par un argument physique.

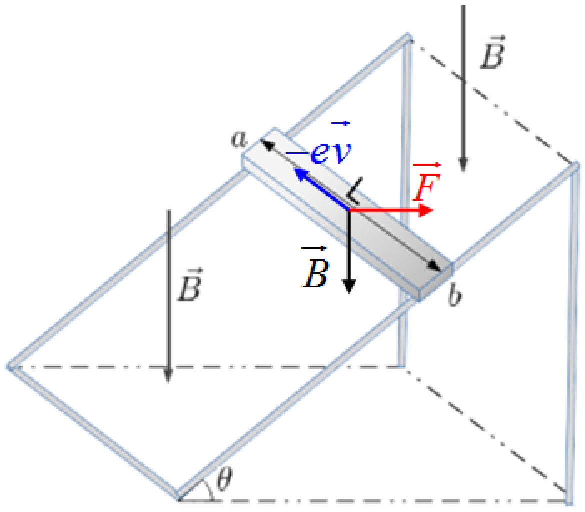
SEFRI ©

CORRIGÉ

Les électrons libres présents dans le conducteur sont soumis à la force de Lorentz :

$\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$

Cette force va mettre en mouvement les électrons créant ainsi un courant induit de sens opposé au mouvement des électrons. D'après la loi de modération de Lenz, la force de Laplace va être orientée en sens opposé au mouvement qui la crée. D'après la définition du produit vectoriel et la connaissance de l'orientation de $\vec{F}$ et $\vec{B}$, on en déduit que $-e\vec{v}$ est orientée de b vers a. Le courant induit i (de sens opposé au déplacement des électrons) parcourt donc le conducteur également de b vers a.



ÉNONCÉ

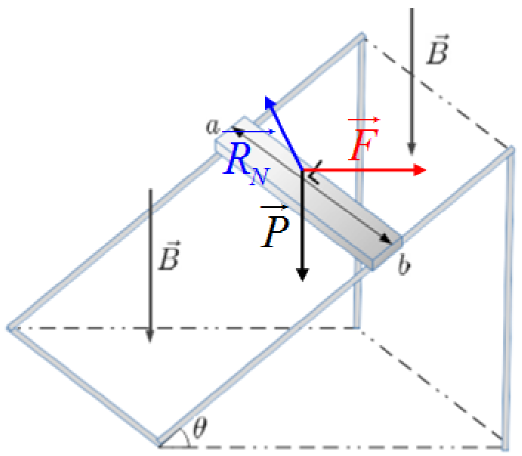
b) Vérifier que l'intensité de la vitesse limite de la barre vaut :

$$v_{\text{limite}} = -\frac{R \cdot m \cdot g}{B^2 \cdot L^2}\tan(\theta)$$

SEFRI ©

CORRIGÉ

La barre est soumise à son poids, à la force de Laplace et à la réaction de la barre sur les rails. Représentons les forces agissant sur la barre :



Afin de calculer la valeur de la force de Laplace F, nous allons utiliser la loi de Lenz et la notion de flux magnétique à travers une surface S:

$$\phi = \vec{B}.\vec{S} = BS\cos\theta$$

Pendant l'intervalle de temps Δt, la variation du flux magnétique est donc:

$$\Delta\phi = BLv\Delta t\cos\theta$$

D'après la loi de Lenz : $e = -\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = Ri$ donc $i = -\frac{BLv}{R}\cos\theta$

La force de Laplace $\vec{F} = i\vec{L}\wedge\vec{B}$ avec $\vec{L} = \overrightarrow{ab}$ a ainsi pour norme :

$F = \frac{B^2L^2\cos\theta}{R}v$ car $\vec{L}\perp\vec{B}$

Par projection sur Ox de la seconde loi de Newton, on obtient l'égalité suivante:

$$P_x - F_x = ma$$

$$mg\sin\theta - \frac{B^2L^2\cos^2\theta}{R}\cdot v = m\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{B^2L^2\cos^2\theta}{mR}v = g\sin\theta$$

On pose : $A = \frac{mR}{B^2L^2\cos^2\theta}$

L'équation différentielle est du type : $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{A} = g\sin\theta$

Dont la solution particulière est : $v(t) = \frac{mR}{B^2L^2\cos^2\theta}g\sin\theta$

On a donc : $v(t) = B\exp\left(-\frac{t}{A}\right) + \frac{mRg}{B^2L^2}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$ avec B une constante qu'on détermine grâce aux conditions initiales :

$$v(t=0) = 0 \Leftrightarrow B = -\frac{mRg}{B^2L^2}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

Au final la variation de la vitesse de la barre en fonction du temps suit la loi suivante:

$$v(t) = \frac{mRg}{B^2L^2} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\left[1 - \exp\left(-\frac{B^2L^2\cos^2\theta}{mRg} \cdot t\right)\right]$$

La vitesse limite de la barre correspond à sa vitesse en régime permanent (pour des temps t suffisamment longs).

On cherche donc : $\lim_{t\to+\infty} v(t)$

$$v_{\lim} = \lim_{t\to+\infty} v(t) = \frac{mRg}{B^2L^2} \cdot \frac{\tan\theta}{\cos\theta}$$

Remarque : la vitesse limite trouvée ici diffère de celle proposée dans l'énoncé (où il y a eu oubli de la projection de la force de Laplace sur l'axe Ox).

ÉNONCÉ

c) Quelle est l'expression de l'intensité du courant traversant la barre une fois sa vitesse limite atteinte ?

SEFRI ©

CORRIGÉ

D'après la loi de Lenz, nous avons établi précédemment que : $i = -\frac{BLv}{R}\cos\theta$

Donc lorsque la barre atteint sa vitesse limite :

$$i = \left(-\frac{BL\cos\theta}{R}\right) \cdot \left(\frac{mRg}{B^2L^2} \cdot \frac{\tan\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$i = -\frac{mg}{BL} \cdot \tan\theta$$

Remarque : l'expression de la vitesse limite établie précédemment nous permet de retrouver un courant induit négatif, ce qui n'est pas le cas avec l'expression donnée dans l'énoncé.